УДК 517.584

ВЛИЯНИЕ ДИСБАЛАНСА НА ДИНАМИКУ ЦЕНТРИФУГИ

В.М. Замятин, В.А. Дубовик

Томский политехнический университет
E-mail: zvm@tpu.ru

Рассмотрены колебания центрифуги, подвешенной в упругом подвесе. Исследованы движения системы с 3-мя степенями свободы. При наличии дисбаланса получены уравнения движения ротора, определена траектория, описываемая его осью.

Любая механическая система, включающая в себя вращающееся тело, в той или иной мере, совершает колебательные движения. В зависимости от податливости подвеса система может иметь различное количество степеней свободы и различное количество собственных частот. Движение механической системы, у которой ротор установлен посередине подшипниковых узлов, рассмотрено довольно широко [1, 2]. В данной статье рассматриваются колебания системы, которые обусловлены вращением консольно закрепленного ротора со смещенным центром масс.

Центрифуга, рис. 1, состоит из тяжелого, полого, без одной торцевой стенки цилиндра (корпуса) – 2 подвешенного на 4-х пружинах – 1 в горизонтальном положении. Через центр торца проходит ось еще одного тонкостенного полого цилиндра (барабана) – 3, без соприкосновения, входящего в полость первого. К боковой стенке барабана, вращающегося со скоростью Ω, размещается груз – 4. Уравнения движения системы составим с помощью уравнений Лагранжа 2-ого рода [3].

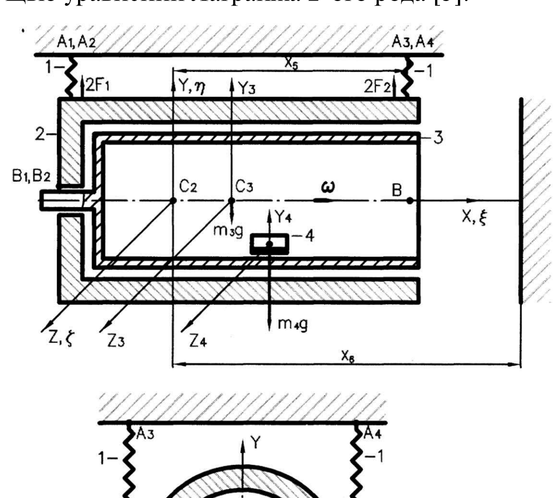


Рис. 1. *Схема центрифуги*

Введем обозначения:

k, m_2, m_3, m_4, I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}, I_{xyi}, I_{yzi}, I_{xzi}, (i=2,3,4), R_4, x_6 – коэффициент упругости, массы, осевые и центробежные моменты инерции корпуса, барабана, груза, радиус вращения центра тяжести груза и абсцисса среза экрана.

Оси координат ξ,η,ζ – неподвижные, x,y,z – жестко связаны с корпусом. Начало осей координат находится в статическом положении равновесия центра тяжести C_2 корпуса (рис. 1). Координаты центра тяжести корпуса и точек крепления пружин в системе x,y,z: $C_2(0,0,0)$; $C_3(x_3,0,0)$; $C_4(x_4;-R_4\cos\Omega t;-R_4\sin\Omega t)$; $B_1(-x_1,0,R)$; $B_2(-x_1,0,-R)$; $B_3(x_5,0,R)$; $B_4(x_5,0,-R)$. Координаты точек крепления пружин в системе координат ξ,η,ζ: $A_1B_1=A_2B_2=l_1$; $A_3B_3=A_4B_4=l_2$; $A_1(-x_1,l_1,R)$; $A_3(x_5,l_2,R)$; $A_2(-x_1,l_1,-R)$; $A_4(x_5,l_2,-R)$, статическое удлинение пружин: $\lambda_{1ст}=\lambda_{2ст}$; $\lambda_{3ст}=\lambda_{4ст}$.

За обобщенные координаты примем смещение точки $C_2\xi_{C2},\eta_{C2},\zeta_{C2}$. Углы Эйлера-Крылова, определяющие ориентацию корпуса: ψ – рыскания; Θ – дифферента; φ – крена.

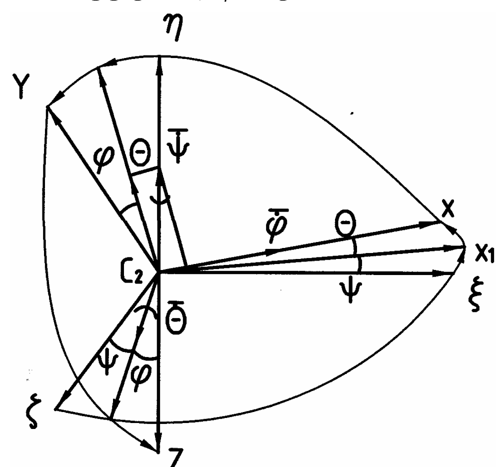


Рис. 2. *Углы Эйлера-Крылова*

Переход от системы координат x,y,z к системе координат ξ,η,ζ осуществляется преобразованием [4]:

$$\xi=\xi_{C2}+x\cos\psi\cos\Theta+$$
$$+\varphi(\sin\psi\sin\varphi-\cos\psi\cos\varphi\sin\Theta)+$$
$$+z(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\sin\Theta);$$
$$\eta=\eta_{C2}+x\sin\Theta+y\cos\Theta\cos\varphi-z\cos\Theta\sin\varphi;$$
$$\zeta=\zeta_{C2}-x(\sin\psi\cos\Theta)+$$
$$+y(\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi\sin\Theta)+$$
$$+z(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\sin\Theta).$$

Проекции угловой скорости корпуса ω_2 на оси x,y,z.

$$\omega_{2x} = \dot{\psi}\sin\Theta + \dot{\varphi};$$

$$\omega_{2y} = \dot{\psi}\cos\Theta\cos\varphi + \dot{\Theta}\sin\varphi;$$

$$\omega_{2z} = -\dot{\psi}\cos\Theta\sin\varphi + \dot{\Theta}\cos\varphi.$$

При малых углах ψ,Θ,φ преобразование координат x,y,z в координаты ξ,η,ζ неподвижной системы отсчета имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_{C2} + x - \Theta y + \psi z;\\ \eta &= \eta_{C2} + \Theta x + y - \varphi z;\\ \zeta &= \zeta_{C2} - \psi x + \varphi y + z. \end{aligned}\right\}$$

При малых углах отклонения корпуса проекции угловой скорости имеют вид

$$\omega_{2x} = \dot{\varphi};\quad \omega_{2y} = \dot{\psi};\quad \omega_{2z} = \dot{\Theta}.$$

Кинетическая энергия корпуса T_2 до малых 2-ого порядка включительно имеет вид

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_{C2}^2 + \dot{\eta}_{C2}^2 + \dot{\zeta}_{C2}^2) +$$

$$+\frac{1}{2}(I_{x2}\dot{\varphi}^2 + I_{y2}\dot{\psi}^2 + \dot{\xi}_{C2}^2 + \dot{\Theta}^2 - 2I_{xz2}\dot{\varphi}\dot{\Theta}) -$$

$$-2I_{xy2}\dot{\varphi}\dot{\psi} - 2I_{yz2}\dot{\psi}\dot{\Theta}).$$

Если ось x – главная центральная ось инерции и моменты инерции корпуса $I_{y2}=I_{z2}=I_{2э}$., то

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_{C2}^2 + \dot{\eta}_{C2}^2 + \dot{\zeta}_{C2}^2) + \frac{1}{2}(I_{x2}\dot{\varphi}^2 + I_{2э}(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2)).$$

Кинетическая энергия барабана T_3. Оси x_3, y_3, z_3 – жестко связаны с барабаном. Моменты инерции $I_{y3}=I_{z3}=I_{3э}$. Ось x_3 – главная центральная ось инерции, то $I_{xy3}=I_{xz3}=0$.

Угловые скорости вращения барабана имеют вид: $\vec{\omega}_3=\vec{\omega}_{3e}+\vec{\omega}_{3r}$; $\vec{\omega}_{3e}=\vec{\omega}_2$; $\vec{\omega}_{3r}=\Omega$, где $\vec{\omega}_{3e}$, $\vec{\omega}_{3r}$ – переносная и относительная угловые скорости [3].

Проекции угловой скорости $\vec{\omega}_3$ на оси на ось x_3; y_3; z_3.

$$\omega_{3x3} = \omega_{2x} + \Omega = \dot{\varphi} + \Omega;$$

$$\omega_{3y3} = \omega_{2y}\cos\Omega t + \omega_{2z}\sin\Omega t = \dot{\psi}\cos\Omega t + \dot{\Theta}\sin\Omega t;$$

$$\omega_{3z3} = \omega_{2z}\cos\Omega t - \omega_{2y}\sin\Omega t = \dot{\Theta}\cos\Omega t - \dot{\psi}\sin\Omega t.$$

Предполагая, что все оси являются главными центральными осями инерции, кинетическую энергию барабана можно представить в виде

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3[\dot{\xi}_{C2}^2 + (\dot{\eta}_{C2} + \dot{\Theta}x_3)^2 + (\dot{\xi}_{C2} - \dot{\psi}x_3)^2] +$$

$$\frac{1}{2}[I_{x3}(\dot{\varphi} + \Omega)^2 + I_{3э}(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2)];$$

где:

$$\xi_{C3} = \zeta_{C2} + x_3;\quad \eta_{C3} = \eta_{C2} + \Theta x_3;\ \zeta_{C3} = \zeta_{C2} - \psi x_3.$$

$$I_{y3}\omega_{3y3}^2 + I_{z3}\omega_{3z3}^2 = I_{3э}(\omega_{3y3}^2 + \omega_{3z3}^2) = I_{3э}(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2).$$

Определим кинетическую энергию груза T_4. Оси x_4,y_4,z_4 связаны с грузом, параллельны осям x_3,y_3,z_3 и являются главными центральными осями инерции.

$$\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_3.$$

$$\omega_{4x4} = \dot{\varphi} + \Omega;\quad \omega_{4y4} = \dot{\psi}\cos\Omega t + \dot{\Theta}\sin\Omega t;$$

$$\omega_{4z4} = \dot{\Theta}\cos\Omega t - \dot{\psi}\sin\Omega t.$$

$$\xi_{C4} = \xi_{C2} + x_4 + \Theta R_4\cos\Omega t - \psi R_4\sin\Omega t;$$

$$\eta_{C4} = \eta_{C2} + \Theta x_4 - R_4\cos\Omega t + \varphi R_4\sin\Omega t;$$

$$\zeta_{C4} = \zeta_{C2} - \psi x_4 - \varphi R_4\cos\Omega t - R_4\sin\Omega t.$$

$$T_4 = \frac{1}{2}m_4(\dot{\xi}_{C4}^2 + \dot{\eta}_{C4}^2 + \dot{\xi}_{C4}^2) + \frac{1}{2}(I_{x4}(\dot{\varphi} + \Omega)^2 + I_{4э}(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2)).$$

Для квадратного сечения груза моменты инерции $I_{4э}=I_{4y4}=I_{4z4}$. Общая кинетическая энергия системы $T=T_2+T_3+T_4$.

$$T = \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_{C2}^2 + \dot{\eta}_{C2}^2 + \dot{\zeta}_{C2}^2) + \frac{1}{2}(I_x\dot{\varphi}^2 + I_э(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2)) +$$

$$+\frac{1}{2}m_3[\dot{\xi}_{C2}^2 + (\dot{\eta}_{C2} + \dot{\Theta}x_3)^2 + (\dot{\xi}_{C2} - \dot{\psi}x_3)^2] +$$

$$+\frac{1}{2}[I_{x3}(\dot{\varphi} + \Omega)^2 + I_{3э}(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2)] +$$

$$+\frac{1}{2}m_4(\dot{\xi}_{C4}^2 + \dot{\eta}_{C4}^2 + \dot{\zeta}_{C4}^2) + \frac{1}{2}[I_{x4}(\dot{\varphi} + \Omega)^2 + I_{4э}(\dot{\psi}^2 + \dot{\Theta}^2)].$$

Общая потенциальная энергия системы, состоящая из потенциальной энергии поля силы тяжести $П_{mg}$ и потенциальной энергии пружин $П_{пр}$, с точностью до малых 2-ого порядка имеет вид:

$$П = П_{mg} + П_{пр} = \frac{1}{2}k[\lambda_{1ст} - \eta_{C2} + x_1\Theta + R\varphi]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}k[\lambda_{2ст} - \eta_{C2} + x_1\Theta - R\varphi]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}k[\lambda_{3ст} - \eta_{C2} - x_5\Theta + R\varphi]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}k[\lambda_{4ст} - \eta_{C2} - x_5\Theta - R\varphi]^2 - \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{4}\lambda_{iст}^2 +$$

$$+(m_2 + m_3 + m_4)g\eta_{C2} + (m_3x_3 + m_4x_4)g\Theta +$$

$$m_4gR_4\varphi\sin\Omega t - m_4gR_4\cos\Omega t.$$

Отсюда получаем выражения для обобщенных сил:

$$Q_{\eta C2} = -4k\eta_{C2} + 2k\Theta(x_1 - x_5);$$

$$Q_{\Theta} = 2k(x_1 - x_5)\eta_{C2} - 2k(x_1^2 + x_5^2)\Theta;$$

$$Q_{\varphi} = -4kR^2\varphi - m_4gR_4\sin\Omega t.$$

Произведя вычисления необходимые для уравнения Лагранжа 2-ого рода, получаем уравнения движения центрифуги:

$$\begin{aligned} &(m_2 + m_3 + m_4)\ddot{\eta}_{C2} + (m_3x_3 + m_4x_4)\ddot{\Theta} +\\ &+m_4R_4\Omega^2\cos\Omega t + m_4\ddot{\varphi}R_4\sin\Omega t +\\ &+2m_4\dot{\varphi}R_4\Omega\cos\Omega t - m_4\varphi R_4\Omega^2\sin\Omega t =\\ &= 2k(x_1 - x_5)\Theta - 4k\eta_{C2}; \end{aligned} \qquad (1)$$

$$(m_3x_3+m_4x_4)\ddot{\eta}_{C2}+(m_3x_3^2+m_4x_4^2+I_э+I_{3э}+I_{4э})\ddot{\Theta}+$$
$$+m_4[R_4\Omega^2\cos\Omega t-\ddot{\varphi}R_4\sin\Omega t+$$
$$+2\varphi R_4\Omega\cos\Omega t-\varphi R_4\Omega^2\sin\Omega t]=$$
$$=2k(x_1-x_5)\eta_{C2}-2k(x_1^2+x_5^2)\Theta; \quad (2)$$

$$m_4R_4(\ddot{\eta}_{C2}+\ddot{\Theta}x_4)\sin\Omega t+$$
$$+\ddot{\varphi}(m_4R_4^2+I_x+I_{x3}+I_{x4})-m_4\varphi R_4^2\Omega^2)=$$
$$=-4kR^2\varphi-m_4gR_4\sin\Omega t. \quad (3)$$

Кривая, описываемая концом оси барабана в системе координат ξ,η,ζ, характеризуется уравнениями:

$$\eta=\eta_{C2}+\Theta x_6;$$
$$\zeta=0;$$
$$\xi=x_6.$$

Функции η_{C2},Θ – находятся из дифференциальных уравнений движения (1–3).

Из уравнений видно, что для консольно закрепленного ротора с дисбалансом ось вращения описывает прямую линию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусаров А.А. и др. Автоматическая балансировка роторов машин. – М.: Наука, 1979. – 306 с.
2. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск, ТГУ, 1985. – 84 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – М.: 1985. – Т. 1, 2.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.

УДК 661.487.621.313